

# Précis de physique pour les nuls, à l'attention des élèves de MP. <sup>1</sup>

Antoine DELIGNAT-LAVAUD<sup>2</sup>

28 décembre 2008

1. Ou comment sauver les meubles une semaine avant les mines  
2. ENS Cachan, mais sans physique aucune.

# Table des matières

<b>1 Mécanique</b>	<b>1</b>
1.1 Rappels de mécanique du point . . . . .	1
1.2 Etude énergétique . . . . .	2
1.3 Forces centrales conservatives . . . . .	2
1.4 Mécanique du solide . . . . .	3
1.5 Constantes et ordres de grandeur . . . . .	4
<b>2 Électromagnétisme</b>	<b>5</b>
2.1 Analyse vectorielle . . . . .	5
2.2 Les sources du champ électromagnétique . . . . .	5
2.3 Equations de Maxwell dans le vide . . . . .	6
2.4 Relations de passage . . . . .	6
2.5 Force de Lorentz . . . . .	6
2.6 Potentiels . . . . .	6
2.7 Electrostatique . . . . .	7
2.8 Magnétostatique . . . . .	8
2.9 Etude énergétique . . . . .	9
2.10 Induction . . . . .	9
2.11 Propagation dans le vide . . . . .	10
2.12 Propagation guidée . . . . .	11
2.13 Exercices caractéristiques . . . . .	12
2.14 Constantes et ordres de grandeur . . . . .	12
<b>3 Thermodynamique physique</b>	<b>13</b>
3.1 Conduction thermique . . . . .	13
3.2 Convection . . . . .	14
3.3 Rayonnement thermique . . . . .	14
3.4 Constantes et ordres de grandeur . . . . .	14

<b>4</b>	<b>Optique</b>	<b>15</b>
4.1	Optique géométrique . . . . .	15
4.2	Interférences de deux sources monochromatiques . . . . .	16
4.3	Interférences pour une source étendue . . . . .	17
4.4	Michelson et interférences non localisées . . . . .	17
4.5	Michelson et interférences localisées . . . . .	17
4.6	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	18

# Chapitre 1

## Mécanique

### 1.1 Rappels de mécanique du point

#### 1.1.1 Référentiel galiléen

Un référentiel est galiléen s'il vérifie le principe d'inertie. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

**Référentiel de Copernic** A pour origine le centre de masse du système solaire et ses axes sont dirigés vers des étoiles très éloignées. Très bon galiléen.

**Référentiel héliocentrique** Le centre de masse du système solaire est confondu avec le centre du soleil (qui représente 99 % de la masse, tout de même).

**Référentiel terrestre** Mêmes axes mais centré sur la terre. Or la terre est en translation elliptique dans le référentiel de Copernic, Cependant, les accélérations sont faibles étant donné la période de révolution. C'est donc un bon galiléen.

**Référentiel géocentrique** A pour origine un point de la surface terrestre et des axes NS, OE et vers le ciel. Encore moins galiléen que le référentiel terrestre, du fait de la rotation de la terre sur elle-même. Attention, lorsqu'on écrit le poids dans le référentiel terrestre, on prend déjà en compte la force d'inertie d'entraînement. Pour certains phénomènes (pendule de Foucault), il faut ajouter la force d'inertie de Coriolis.

#### 1.1.2 Principe fondamental de la dynamique

On note  $\vec{p} = m\vec{v}$  la quantité de mouvement ou impulsion d'une masse ponctuelle  $M(m)$ .

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

où  $\vec{F}$  est la résultante des forces appliquées en  $M$ .

#### 1.1.3 Théorème du moment cinétique

On note  $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$  le moment cinétique en O du point  $M$  et  $\vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$  le moment en O de la résultante des forces appliquées en  $M$ . A condition que **O soit fixe dans le référentiel**, on dispose du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

#### 1.1.4 Référentiel non galiléen

Soit  $\mathcal{R}_2$  un référentiel en mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}_1$ .

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2} \wedge \vec{A}$$

On en déduit la loi de composition des vitesses d'un point M :

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}_1} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{v}_e \quad \vec{v}_e = \vec{v}(O)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM}$$

où  $\vec{v}_e$  est la vitesse d'entraînement.

De même la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}_1} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}_2} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

où  $\vec{a}_e$  et  $\vec{a}_c$  sont les accélérations respectivement d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{a}_e = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}_2} \quad \vec{a}_c = \vec{a}(O)_{\mathcal{R}_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Il ne faut pas oublier les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis quand on applique le PFD ou le TMC dans un référentiel non galiléen :

$$m \vec{a}_{\mathcal{R}_2} = \vec{F} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

$$\left( \frac{d\vec{L}_{O_2}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_2} = \vec{O}_2 \vec{M} \wedge (\vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic})$$

## 1.2 Etude énergétique

### 1.2.1 Travail, puissance, énergie cinétique

Le travail élémentaire et la puissance d'une force sont

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

L'énergie cinétique d'une masse  $m$  est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

### 1.2.2 Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

### 1.2.3 Energie potentielle

Une force  $\vec{F}$  dérive du potentiel  $E_p$  si elle est à circulation conservative, en particulier son travail ne dépend pas du chemin suivi :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{O}\vec{M} = -dE_p$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

Force	Potentiel
$-m \vec{g}$	$mgz$
$-k(l - l_0) \vec{u}_l$	$\frac{1}{2} k l^2$
$q \vec{E}$	$qV$
$\frac{k}{r^2}$	$\frac{k}{r}$

Un minimum d'énergie potentielle est associé à un point d'équilibre stable. Un maximum d'énergie potentielle correspond à un point d'équilibre instable.

### 1.2.4 Energie mécanique

L'énergie mécanique est définie par  $E_m = E_c + E_p$ . Le théorème de l'énergie mécanique affirme qu'une variation de l'énergie mécanique est due au travail des forces non conservatives (nul si la force est orthogonale à la vitesse) :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{nc}}$$

$$\Delta E_m = W_{\text{nc}}$$

## 1.3 Forces centrales conservatives

Une force centrale est de la forme  $\vec{F}(r) = f(r) \vec{u}_r$ . On s'intéresse tout particulièrement à une force coulombienne :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} \frac{k}{r}$$

Les conséquences sont nombreuses :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$L = m r^2 \dot{\theta} = mC$$

donc le mouvement est plan car  $\vec{O}\vec{M}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux à  $\vec{L}_O$  ; C est la constante des aires qui montre au passage la loi des aires ou deuxième loi de Kepler :

$$dS = \frac{C}{2} dt$$

L'énergie se conserve puisque la force est conservative :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}$$

$$E_{p,\text{eff}} = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$$

De plus la première loi de Kepler, qui se retrouve grâce aux formules de Binet (changement de variable  $u = \frac{1}{r}$ ) on sait que les trajectoires sont des coniques :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Si  $e = 0$ , c'est un cercle, si  $e \in ]0, 1[$  c'est une ellipse, si  $e = 1$  c'est une parabole, et si  $e > 1$  c'est une hyperbole. Quelques rappels sur les coniques en polaire :

$$p = \frac{mC^2}{|k|} = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$$

$$E_m = -\frac{k}{2a}$$

Il est possible de connaître immédiatement la nature de la trajectoire en calculant l'énergie mécanique initiale. Si elle est négative, on trouve une ellipse, si elle est nulle on trouve une parabole, sinon c'est une hyperbole.

Si il faut calculer la période de révolution, on dispose de la troisième loi de Kepler, obtenue en intégrant le carré de la deuxième :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

## 1.4 Mécanique du solide

### 1.4.1 Propriétés des solides

Torseur cinétique :

$$\overrightarrow{p}_S = \sum_i \overrightarrow{p}_i = \iiint_S \overrightarrow{v}(M) dm \quad \overrightarrow{L}_A(S) = \sum_i \overrightarrow{L}_A(M_i)$$

### 1.4.2 Formule fondamentale de la cinématique du solide

$$\overrightarrow{v}(B \in S) = \overrightarrow{v}(A \in S) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_S$$

### 1.4.3 Roulement sans glissement

Pour deux solides en contact au point  $I$ , on appelle vitesse de glissement :

$$\overrightarrow{v}_g = \overrightarrow{v}(I \in S_1) - \overrightarrow{v}(I \in S_2)$$

On dit qu'il y a roulement sans glissement lorsque :

$$\overrightarrow{v}_g = 0$$

### 1.4.4 Premier théorème de Koenig

$$\overrightarrow{L}_A(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v}_G$$

### 1.4.5 Second théorème de Koenig

$$E_c(S/\mathcal{R}) = E_c^*(S) + \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}_G^2$$

### 1.4.6 Moment d'inertie

Attention, à n'utiliser que pour le moment d'inertie par rapport à un axe fixe  $\Delta$  ! Dans ce cas, le moment cinétique du solide en rotation à vitesse angulaire  $\omega$  est

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

Solide	Moment cinétique
Cylindre creu ou cerceau	$mR^2$
Cylindre ou disque plein	$\frac{1}{2}mR^2$
Boule	$\frac{2}{5}mR^2$
Tige de longueur $2l$	$\frac{1}{3}ml^2$

### 1.4.7 Théorème de Huyghens

$$J_{\Delta',A} = J_{\Delta,G} + m(AG)^2$$

### 1.4.8 Théorème du centre de masse

Pour un système fermé de masse  $m$ , de centre de masse  $G$  dans un référentiel galiléen :

$$m\overrightarrow{a}_G = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}$$

### 1.4.9 Théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen, la résultante des actions mécaniques extérieures est égale à la dérivée de la résultante cinétique du système :

$$\frac{d\overrightarrow{p}(S)}{dt} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}$$

### 1.4.10 Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen où le point  $A$  est fixe, la dérivée du moment cinétique en  $A$  du système vaut la somme des moments des actions mécaniques extérieures. En particulier, si ce point est sur un axe fixe du solide :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{A,\text{ext}} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \mathfrak{M}_{\Delta,\text{ext}}$$

### 1.4.11 Lois de coulombs pour des solides en contact

Si le solide roule sans glisser, la résultante des forces de contact au point de contact est contenue dans un cône de demi angle au sommet :

$$\phi = \arctan(f) \quad \|\vec{T}\| \leq f \|\vec{N}\|$$

Lorsque le solide glisse, on a toujours  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$ , et la composante tangentielle a même direction et sens contraire de la vitesse de glissement.

### 1.4.12 Puissance des efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}(A \in \mathcal{S}) + \overline{\mathfrak{M}}_{A,\text{ext}} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}}$$

### 1.4.13 Puissance des efforts intérieurs

Elle est indépendante du référentiel. Pour deux solides exerçant des actions l'un sur l'autre :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_{\mathcal{S}_2}(A \in \mathcal{S}_1) + \overline{\mathfrak{M}}_{A,1 \rightarrow 2} \cdot \vec{\Omega}_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2}$$

### 1.4.14 Théorème de la puissance cinétique

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

### 1.4.15 Torseurs

Torseur cinématique du solide :

$$\mathcal{V}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \\ \vec{v}(A) \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}}$$

Torseur cinétique du solide :

$$\mathcal{C}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \\ \vec{L}_A \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}}$$

Torseur des actions extérieures :

$$\mathcal{T}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}}$$

Puissance des actions extérieures :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{T}_A \otimes \mathcal{V}_A$$

Pour un système à un degré de liberté soumis à des actions extérieures conservatives, le théorème de la puissance cinétique est souvent le choix le plus judicieux.

## 1.5 Constantes et ordres de grandeur

Constante de gravitation	$G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Accélération standard de gravité	$g = 9.80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse de la terre	$m_T = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la terre	$R_T = 6371 \text{ km}$
Masse du soleil	$2 \times 10^{30} \text{ kg}$

# Chapitre 2

# Électromagnétisme

## 2.1 Analyse vectorielle

### 2.1.1 Flux, circulation d'un champ

$$\Phi = \iint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

$$C = \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l}$$

### 2.1.2 Gradient

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{l}$$

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}f \cdot d\vec{l} = f(B) - f(A)$$

Un champ  $\vec{W}$  est à circulation conservative si il dérive d'un champ scalaire (ou potentiel) :  $\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}}f$ .

### 2.1.3 Divergent

Formule d'Ostrogradsky :

$$\iiint_V \text{div}\vec{W}dV = \oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}$$

Les champs de divergence nulle sont donc à flux conservatif.

### 2.1.4 Rotationnel

Formule de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{W} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{W} \cdot d\vec{l}$$

Les champs de rotationnel nul sont à circulation conservative.

### 2.1.5 Laplacien

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}U) \quad \Delta \vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{W}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{W})$$

### 2.1.6 Symétries

Lorsque le champ est un vrai vecteur, si  $\Pi$  est plan de symétrie des sources, le champ en un point du plan est contenu dans  $\Pi$ ; si  $\Pi'$  est plan d'antisymétrie, le champ en un point du plan est orthogonal à  $\Pi'$ , et si  $\Delta$  est axe de symétrie de révolution des sources, le champ en tout point de l'axe est contenu dans  $\Delta$ .

Lorsque le champ est un pseudo vecteur, si  $\Pi$  est plan de symétrie, le champ en un point du plan est orthogonal à  $\Pi$ ; si  $\Pi'$  est plan d'antisymétrie des sources, le champ en un point du plan est contenu dans  $\Pi'$ , et si  $\Delta$  est axe de symétrie de révolution des sources, le champ en tout point de l'axe est contenu dans  $\Delta$ .

Principe de Curie : les symétries des causes se retrouvent dans les effets.

## 2.2 Les sources du champ électromagnétique

Ce sont les charges électriques, fixes (distribution de charges) ou mobiles (distribution de courants). La charge électrique est quantifiée (multiple entier de  $e$ ), et se mesure en Coulombs.

### 2.2.1 Densité de charge

Densité volumique :  $dq = \rho d\tau$  ; surfacique :  $dq = \sigma dS$  ; linéique :  $dq = \lambda dl$ .

### 2.2.2 Densité de courant

En notant  $\rho_m$  la densité volumique des charges mobiles de vitesse moyenne  $\vec{v}$ , on définit le vecteur densité volumique de courant par :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$

L'intensité électrique totale d'une section  $S$  de conducteur est le flux de  $\vec{j}$  à travers  $S$ .

### 2.2.3 Conservation de la charge

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

## 2.3 Equations de Maxwell dans le vide

Maxwell-Thomson	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$

avec  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  le vecteur densité de courant volumique de déplacement. Les équations de Maxwell sont linéaires : le principe de superposition s'applique.

## 2.4 Relations de passage

N'est valable que lors de la traversée d'une surface  $S$  de densité de charge  $\sigma$  ou de densité de courants surfaciques  $\vec{j}_S$ , de vecteur normal unitaire sortant  $\vec{n}$ . Les champs de chaque côté de la surface sont indicés par 1 et 2.

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}$$

## 2.5 Force de Lorentz

Une particule de charge  $q$  soumise à un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  subit une force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

### 2.5.1 Potentiel d'une charge dans un champ statique

$$E_p(M) = qV(M)$$

### 2.5.2 Energie potentielle d'interaction

$$E_p = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} \iiint_{\tau} V(P) \rho(P) d\tau$$

## 2.6 Potentiels

Attention, mieux vaut éviter les potentiels lorsque les distributions sont infinies !

### 2.6.1 Potentiel vecteur

Comme  $\vec{B}$  est à flux conservatif, il dérive d'un potentiel vecteur :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$\vec{A}$  n'est pas unique, puisqu'on peut y ajouter un champ à circulation conservative.

### 2.6.2 Potentiel scalaire

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,  $\operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$ , par la propriété sur les champs à circulation conservative

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$V$  n'est pas unique, on peut y ajouter une fonction quelconque du temps. En revanche,  $V$  est toujours continu.

### 2.6.3 Conditions de jauge

On peut imposer l'unicité du couple  $(\vec{A}, V)$  par une relation supplémentaire entre  $\vec{A}$  et  $V$ . Jauge de Lorentz :

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

### 2.6.4 Equations des potentiels

Valable uniquement en jauge de Lorentz :

$$\Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

### 2.6.5 Solutions à potentiels retardés

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho(\vec{r}, t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}{c})}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} d\vec{r}_P$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(\vec{r}, t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|}{c})}{\|\vec{r} - \vec{r}_P\|} d\vec{r}_P$$

### 2.6.6 A. R. Q. S.

L'approximation des régimes quasi stationnaires consiste à négliger les temps de propagation des champs. Pour un courant électrique de fréquence  $f$ , dans un circuit de diamètre  $D$ , l'ARQS revient à considérer  $fD \ll c$ , ce qui se vérifie largement jusqu'à 10Mhz. Conséquence : loi des noeuds.

$$\vec{j}_D = 0 \quad \text{div } \vec{j} = 0$$

### 2.6.7 Cartes de champ

Pour des champs en régime permanent, on peut représenter les lignes de champs, où le champ est tangent en tout point. Pour le potentiel, on trace les courbes équipotentielles. Une ligne du champ électrique est en tout point orthogonale à l'équipotentielle en ce point.

## 2.7 Electrostatique

### 2.7.1 Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

### 2.7.2 Equation de Poisson et solution

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau$$

dont on déduit la loi de Coulomb :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P \in \tau} \frac{\rho(P) \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau$$

Cas particulier utile : une charge  $q$  à l'origine :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

### 2.7.3 Conducteur parfait en équilibre

Un conducteur est un milieu où les charges peuvent se déplacer librement. Dans un conducteur, le mouvement des charges dépend du champ électrique selon la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Un conducteur est dit parfait lorsque sa conductivité  $\gamma$  est infinie. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait en équilibre, en particulier toutes les charges sont situées sur la surface extérieure. On retrouve par les conditions de passage au voisinage de la surface du conducteur le théorème de Coulomb :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}$$

Une résistance électrique est une section de conducteur parfait. On retrouve la loi d'Ohm de l'électrocinétique : la tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle à l'intensité

qui le traverse. On définit la résistance  $R$  par :

$$R = \frac{V_A - V_B}{I_{AB}} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}$$

Les résistances de conducteurs en série s'ajoutent.

### 2.7.4 Condensateurs

Un condensateur est constitué de deux conducteurs en influence totale. Par conséquent, les armatures  $A$  et  $B$  portent des charges opposées :  $Q = |Q_A| = |Q_B|$ . Dans un condensateur,  $Q$  est proportionnel à la différence de potentiel entre les armatures. On définit la capacité  $C$  du condensateur par :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \varepsilon_0 \frac{\iint_{S \supset A} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

Les capacités de condensateurs montés en parallèle s'ajoutent.

### 2.7.5 Dipôle électrostatique

Le dipôle électrostatique est un doublet de charges opposées, placées en  $P_1$  et  $P_2$  et séparée d'une distance  $a$  petite devant la distance d'observation  $r$ . On pose  $\vec{p} = q\overline{P_1P_2}$  le moment dipolaire du dipôle. On trouve l'expression du potentiel par développement limité de  $\frac{1}{P_2M} - \frac{1}{P_1M}$  :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 P_2M} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 P_1M} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{p \cos \theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

Si le dipôle électrostatique est plongé dans un champ électrique  $\vec{E}_0$ , il subit une force de Lorentz de résultante nulle et de moment :

$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$$

## 2.8 Magnétostatique

### 2.8.1 Equation de Poisson et solution

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau$$

dont on déduit la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overline{PM}}{PM^3} d\tau$$

### 2.8.2 Théorème d'Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlace}}$$

### 2.8.3 Potentiel vecteur d'un champ magnétique uniforme

$$\vec{A}(M) = \frac{\vec{B} \wedge \overline{OM}}{2}$$

### 2.8.4 Dipôle magnétique

Un dipôle magnétique est une spire circulaire de rayon  $R$  petit devant la distance d'observation  $r$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On pose  $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$  le moment magnétique du dipôle. Champ créé en coordonnées sphériques :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \cos \theta}{2\pi r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

### 2.8.5 Action du champ magnétique sur un conducteur

On considère un conducteur parcouru d'un courant  $I$  plongé dans un champ  $\vec{B}$  quelconque. Ce conducteur subit une force de Laplace de densité volumique

$$d^3 \vec{F}_l = (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$$

de résultante totale et de moment en  $A$  :

$$\vec{F}_l = \iiint_{\tau} \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

$$\vec{M}_A = \iiint_{P \in \tau} \overline{AP} \wedge (\vec{j}(P) \wedge \vec{B}(P)) d\tau$$

En particulier, un dipôle magnétique plongé dans un champ  $\vec{B}_0$  subit un couple magnétique

$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$$

## 2.9 Etude énergétique

### 2.9.1 Puissance volumique de la force de Lorentz

Les forces de Laplace ne travaillent pas. La puissance volumique cédée aux charges mobiles, responsable de l'effet Joule dans les conducteurs, est

$$\frac{dp}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

### 2.9.2 Densité volumique d'énergie électromagnétique

$$\omega = \frac{dW}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

### 2.9.3 Vecteur de Poynting

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique à travers cette surface.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

### 2.9.4 Bilan énergétique

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

## 2.10 Induction

### 2.10.1 Loi de Lenz

Dans tous les phénomènes d'induction, les forces induites tendent à s'opposer aux sources qui les ont créé.

### 2.10.2 Champ électromoteur « de Neumann »

On considère un conducteur immobile plongé dans un champ magnétique variable où l'ARQS est valable (en particulier lorsqu'il faut calculer ce champ). Les variations de  $\vec{B}$  sont la source d'un champ électromoteur induit « de von Neumann » :

$$\vec{E}_m = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans une portion  $AB$  du conducteur apparaît une force électromotrice d'induction :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

La portion  $AB$  est équivalente à un générateur de tension de résistance interne  $R_{AB}$  :

$$R_{AB} I = \int_A^B (\vec{E}_m - \operatorname{grad} V) \cdot d\vec{l} = e + V_A - V_B$$

Dans le cas d'un circuit fermé et indéformable traversé par un flux magnétique  $\Phi$ , on dispose de la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

De plus le courant  $i$  induit dans le circuit crée un champ magnétique dont le flux  $\Phi_p$  à travers le circuit est proportionnel à  $i$ . Le coefficient de proportionnalité  $L$  est appelé inductance propre du circuit. Il est à l'origine d'une fem d'auto-induction  $e_i$ .

$$\Phi_p = Li \quad e_i = - \frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Si deux circuits sont placés dans le champ magnétique variable, il faut prendre en compte les flux respectifs des champs induits par les courants. Le flux d'inductance mutuelle dans le circuit 1 est proportionnel au courant qui traverse le circuit 2. On dispose en outre du théorème de Neumann :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1 \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2 \quad M_{21} = M_{12}$$

L'énergie auto-induction stockée par le circuit est  $\frac{1}{2} Li^2$ , celle d'induction mutuelle pour deux circuits est  $M i_1 i_2$ .

### 2.10.3 Champ électromoteur « de Lorentz »

C'est le cas où le circuit se déplace dans un champ magnétique stationnaire. Supposons qu'un circuit se déplace à une vitesse  $\vec{v}$  faible dans le référentiel galiléen lié à la

source du champ stationnaire  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Dans le référentiel lié au circuit mobile, le champ électromagnétique  $(\vec{E}', \vec{B}')$  vérifie :

$$\boxed{\vec{B}' = \vec{B}} \quad \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Dans le référentiel du circuit,  $\vec{E} = -\text{grad}V + \vec{v} \wedge \vec{B}$ . On appelle champ électromoteur d'induction (de Lorentz) :

$$\boxed{\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Une portion de circuit est alors équivalente à un générateur de tension de force électromotrice d'induction  $e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ .

En l'absence de générateurs de tension dans le circuit, d'après la loi d'Ohm il apparaît une densité de courant volumique, ou courants de Foucault :

$$\boxed{\vec{j}_F = \gamma \vec{v} \wedge \vec{B}}$$

En vertu de la loi de Lenz, les forces de Laplace créées par ces courants s'opposent au déplacement du conducteur.

### 2.10.4 Méthode de résolution

D'abord, identifier le type d'induction, puis définir les orientations des courants et des déplacements (la fem induite doit être orientée dans le sens du calcul de la circulation du champ électromoteur, en convention générateur). Ne pas oublier l'éventuelle fem d'auto-induction, écrire le circuit électrique équivalent et prendre en compte les forces de Laplace pour la résolution de la partie mécanique.

## 2.11 Propagation dans le vide

On considère un champ électromagnétique éloigné de ses sources. Par le calcul classique du double rotationnel, on vérifie que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont solution de l'équation de d'Alembert, avec  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0} \quad \boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0}$$

### 2.11.1 Types de solutions

On appelle onde toute solution de l'équation de propagation. Une onde est dite plane s'il existe une direction  $\vec{u}$  telle que l'onde soit constante dans tout plan orthogonal à  $\vec{u}$ . Les solutions de la forme :

$$\boxed{f(\vec{r}, t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}) + g(\vec{r}, t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})}$$

sont appelées ondes progressives, elles se propagent à la vitesse  $c$  dans la direction  $\vec{u}$ . Toutes les ondes progressives ne sont pas planes (exemple : les ondes sphériques). Une onde plane progressive est dite harmonique ou monochromatique si elle est sinusoïdale :

$$\boxed{f(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}) + g(t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}) = A \cos(\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}) + \phi_{\vec{u}})}$$

Les solutions à variables séparées sont appelées ondes stationnaires :

$$\boxed{f(\vec{r})g(t)}$$

### 2.11.2 L'onde plane progressive monochromatique

On s'intéresse en particulier à la propagation du champ électrique. En notation complexe,

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}}$$

$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$  est appelé vecteur d'onde. Sa norme  $k$  est appelée nombre d'onde. La longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  est la période spatiale du champ.

### 2.11.3 Notation complexe

En notation complexe, à condition de respecter la convention de signes ci-dessus,

$$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E}} \quad \boxed{\text{div} \vec{E} = -j \vec{k} \cdot \vec{E}} \quad \boxed{\text{rot} \vec{E} = -j \vec{k} \wedge \vec{E}}$$

En particulier pour une OPPH, et seulement dans ce cas, on a :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{c^2 \vec{B} \wedge \vec{k}}{\omega}} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

Attention à l'utilisation de la notation complexe lors d'opérations non linéaires, en particulier pour les calculs d'énergie. On peut éventuellement utiliser le vecteur de Poynting complexe, qui ne donne que la valeur moyenne des puissances surfaciques :

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0}}$$

### 2.11.4 Polarisation d'une OPPH

La polarisation d'une OPPH est la différence de phase entre les deux composantes non nulles du champ qui se propage. Elle permet de décrire la variation de la direction du champ. Dans le repère  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u})$ ,

$$\vec{E}_0 = E_{01}e^{j\phi_1}\vec{u}_1 + E_{02}e^{j\phi_2}\vec{u}_2 \quad p = \phi_2 - \phi_1$$

Valeur de $p$	$]0, \pi[$	$] - \pi, 0[$	$\pm \frac{\pi}{2}$	0 ou $\pi$
Polarisation	elliptique gauche	elliptique droite	circulaire	rectiligne

Dans le cas où la phase varie aléatoirement lors de l'émission, l'onde n'est pas polarisée.

### 2.11.5 Dispersion

On parle de dispersion lorsqu'une onde ne se propage pas de la même manière lorsque sa longueur d'onde change. La relation de dispersion est l'expression du nombre d'onde en fonction de  $\omega$ . On parle aussi de filtrage en longueur d'onde (exemple : les plasmas).

### 2.11.6 Vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}$$

### 2.11.7 Vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

### 2.11.8 Vitesse de l'énergie

$$v_e = \frac{\langle \Pi \rangle}{\langle u \rangle}$$

Où  $u$  désigne la densité volumique d'énergie électromagnétique. A condition que l'onde ne soit pas amortie,  $v_g = v_e$ .

### 2.11.9 Rayonnement du dipôle

Un dipôle oscillant de moment dipolaire  $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$  est la source d'un potentiel retardé

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

En utilisant la notation complexe, et en assimilant le champ magnétique créée à une OPPH, on trouve :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 p_0 \sin \theta \omega^2}{4\pi r c} e^{j(\omega t - kr)} \vec{u}_\phi \quad \vec{E} = \frac{\mu_0 p_0 \sin \theta \omega^2}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est :

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\mu_0 p_0 \omega^4}{32\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon  $r$  est :

$$\langle \Pi \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Où l'on voit que le ciel est azuré et le soleil couchant rougeoyant. Poétique !

## 2.12 Propagation guidée

### 2.12.1 Relations de passage et densités surfaciques

Utile particulièrement lorsqu'un champ se propageant dans le vide rencontre un conducteur parfait :

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \vec{n} \wedge \vec{B}$$

### 2.12.2 Incidence d'une onde sur un conducteur parfait

Dans un conducteur parfait,  $\vec{E} = 0$ . Du fait des conditions aux limites, il est nécessaire qu'une onde incidente crée des distributions surfaciques de charges et courants, et donc d'une onde réfléchi.

Le conducteur occupe l'espace  $z < 0$ , on se limite à un plan où  $y$  est constant. En notant  $\vec{k}$  le vecteur d'onde incident et  $\vec{k}'$  le vecteur d'onde réfléchi,  $i$  et  $i'$  les angles d'incidence et de réflexion,  $\omega$  et  $\omega'$  les pulsations respectives, la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  impose que sur l'interface :

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{r}$$

dont on déduit  $\omega = \omega'$  et  $(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r} = 0$  sur l'interface. Pour  $\vec{r} = \vec{u}_y$ , on trouve :

$$\boxed{k \sin i = k' \sin i'} \quad \boxed{k = k' = \frac{\omega}{c}} \quad \boxed{i = i'}$$

### 2.12.3 Incidence normale sur un conducteur parfait

L'onde incidente est réfléchiée et déphasée de  $\pi$ . La superposition de l'onde incidente à l'onde réfléchiée est une onde stationnaire. Les lieux où le champ est nul sont fixes sont appelés noeuds, ventres pour les extrema du champ. Deux noeuds sont séparés par une demi longueur d'onde.

### 2.12.4 Incidence d'une onde sur un conducteur réel

En utilisant la loi d'Ohm locale dans l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

qui donne la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = -j\omega\mu_0\gamma} \quad \boxed{k = \frac{1-j}{\delta}} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}}$$

Dans un conducteur réel, l'onde se propage mais est atténuée en amplitude. La longueur caractéristique de cette atténuation,  $\delta$ , est appelée profondeur de pénétration ou profondeur de peau. Elle est d'autant plus faible que la conductivité et la fréquence sont élevées.

On admet de plus la loi de Snell-Descartes qui donne l'angle de l'onde réfractée :

$$\boxed{n_1 \sin i_2 = n_2 \sin i_1}$$

### 2.12.5 Guide d'onde

On se restreint au mode transverse électrique, tel que  $\vec{E}$  n'ait qu'une composante non nulle et soit orthogonal à  $\vec{k}$ . Il existe plusieurs modes de propagation ; du fait des relations de passage il doit y avoir un nombre entier de demi périodes entre les parois du guide. La relation de dispersion est de la forme :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - n^2\omega_p^2}{c^2}}$$

Le choix du mode  $n$  dépendra de la fréquence de l'onde que l'on cherche à guider.

## 2.13 Exercices caractéristiques

### 2.13.1 Champ magnétique créé par un solénoïde

Un solénoïde infini de rayon  $R$  ayant  $n$  spires par unité de longueur est parcouru par un courant  $I$ . Sur un point de l'axe  $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ .

$$dB = \frac{\mu_0 n dl I}{2R} \sin^3 \alpha \quad B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

A l'intérieur du solénoïde, lorsque  $\alpha_1 \rightarrow \pi$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$  on a

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

$\vec{B}$  est nul en dehors du solénoïde.

### 2.13.2 Propagation dans un plasma

Un plasma est un milieu ionisé mais globalement neutre. On note  $\alpha$  la densité de charges (positives ou négatives). On néglige le mouvement des charges positives et on ne considère que les déplacements d'électrons, dont la vitesse reste négligeable devant  $c$ .

$$\boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}} \quad \boxed{\vec{j} = -\alpha \vec{v} = \frac{\alpha e^2}{j\omega m}}$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \alpha e^2}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{\alpha e^2}{\varepsilon_0 m}}$$

La plasma se comporte comme un passe haut de pulsation de coupure  $\omega_p$ .

## 2.14 Constantes et ordres de grandeur

Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Profondeur de peau du cuivre à 100 Hz	$\delta = 6 \text{ mm}$
Profondeur de peau du cuivre à 1 Mhz	$\delta = 65 \mu\text{m}$

$\lambda$ (nm)	380-450	450-500	500-570	570-590	590-620	620-750
Couleur	violet	bleu	vert	jaune	orange	rouge

$\lambda$ (nm)	0.01-0.5	10-400	400-800	1-100 $\mu\text{m}$	> 1mm
Domaine	Rayons X	Ultraviolet	Visible	Infrarouge	Ondes radio

# Chapitre 3

## Thermodynamique physique

### 3.1 Conduction thermique

#### 3.1.1 Flux thermique, densité de courant de chaleur

Le flux thermique ( $W$ ) est la puissance thermique qui traverse une surface  $S$  algébrique :

$$\delta Q = \Phi dt$$

Comme pour l'intensité électrique, on définit le vecteur densité de courant de chaleur  $\vec{j}_Q$  par :

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

#### 3.1.2 Conservation de l'énergie

On considère un volume  $\tau$  contenu dans une surface fermée algébrique  $S$ . En l'absence de création d'énergie dans  $\tau$ , d'après le premier principe la variation d'énergie interne est égale à la chaleur reçue par le système :

$$dU = \delta Q = -\Phi dt$$

Par définition de  $\Phi$ ,

$$\frac{dU}{dt} = - \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{j}_Q d\tau$$

Soit sous forme volumique locale :

$$\iiint_{\tau} \left( \frac{\partial u_V}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q \right) d\tau = 0$$

Dont la forme locale est l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial u_V}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$$

#### 3.1.3 Loi phénoménologique de Fourier

À condition d'être au voisinage de l'équilibre dans un milieu isotrope, c'est à dire où la conductivité thermique  $\lambda$  est constante :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

#### 3.1.4 Equation de la chaleur

Dans le cas d'un solide ou d'un gaz parfait, on peut exprimer la densité volumique d'énergie interne en fonction de la masse volumique  $\rho$  et de la capacité thermique massique  $c$  :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$$

On définit la diffusivité thermique par :

$$D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

#### 3.1.5 Résistance thermique

On a équivalence entre le flux thermique  $\Phi$  et l'intensité électrique  $I$ , la température  $T$  et le potentiel électrique  $V$  (du fait des lois d'Ohm et de Fourier). On définit la résistance thermique par :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_2 - T_1}{\Phi_{1 \rightarrow 2}}$$

Par exemple, pour un barreau de section  $S$  et de longueur  $l$ ,

$$R_{\text{th}} = \frac{l}{\lambda S} \quad \left( R_{\text{elec}} = \frac{l}{\gamma S} \right)$$

## 3.2 Convection

Les fluides ont une conductivité thermique très faible. La diffusion de la chaleur dans les fluides se fait principalement par la mise en mouvement des molécules.

### 3.2.1 Loi de Newton

On peut modéliser le flux de chaleur par convection à une interface entre un solide à la température  $T_s$  et un fluide à température supposée invariante (exemple : air extérieur à une pièce)  $T_{\text{ext}}$  par une résistance thermique équivalente selon la loi :

$$R_{\text{convection}} = \frac{T_s - T_{\text{ext}}}{\Phi} = \frac{1}{hS}$$

$h$  est le coefficient d'échange thermique.

## 3.3 Rayonnement thermique

### 3.3.1 Corps noir

Le modèle de rayonnement thermique est celui du corps noir, c'est à dire d'un objet qui absorbe toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit. Son spectre d'émission ne dépend alors que de sa température.

### 3.3.2 Loi de Planck

La répartition du flux thermique émis par un corps noir en fonction de sa température est donnée par la loi :

$$d\Phi_{\text{emis}} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{k_B \lambda T}} - 1}$$

### 3.3.3 Loi de déplacement de Wien

La maximum du spectre d'émission du corps noir  $\lambda_m$  vérifie :

$$\lambda_m T = b$$

### 3.3.4 Loi de Stefan-Boltzmann

Puissance surfacique totale rayonnée par le corps noir :

$$\mathcal{P} = \sigma T^4$$

## 3.4 Constantes et ordres de grandeur

Conductivité de l'air	$\lambda = 0.02 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Conductivité du verre	$\lambda = 1.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Conductivité du cuivre	$\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de Wien	$b = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

# Chapitre 4

## Optique

### 4.1 Optique géométrique

#### 4.1.1 Définitions

**Rayon lumineux** Direction de propagation de l'énergie lumineuse.

**Principe du retour inverse** Le chemin parcouru par la lumière peut l'être en sens inverse.

**Système optique** Ensemble de dioptrés et de miroirs

**Système dioptrique** Système ne contenant que des dioptrés

**Système catoptrique** Système ne contenant que des miroirs

**Système catadioptrique** Système contenant des miroirs et des dioptrés

**Système centré** Système optique ayant une symétrie de révolution

**Axe optique** Axe de symétrie de révolution du système centré

**Chemin optique**  $L_{AB} = \int_A^B n(s)ds$

**Stigmatisme** Un système optique est stigmatique si l'image d'un faisceau concourant par ce système est un faisceau concourant.

**Aplanétisme** Un système stigmatique est aplanétique si l'image d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique est un plan transverse.

**Approximation de Gauss** On considère des rayons peu inclinés et peu éloignés par rapport à l'axe optique. Conditions réalisées avec un diaphragme.

**Objet** Les rayons émis rencontrent la face d'entrée du système

**Image** Les rayons émergent de la face de sortie du système

**Objet réel** Les rayons divergent du point objet

**Objet virtuel** Les rayons convergent au point objet

**Image réelle** Les rayons convergent au point image

**Image virtuelle** Les rayons divergent du point image

#### 4.1.2 Lentilles minces

Le centre optique est noté  $O$ , le foyer image (image d'un objet à l'infini sur l'axe optique) est noté  $F'$ , le foyer objet (symétrique de  $F'$ ) est noté  $F$ . On pose  $f' = \overline{OF'}$ ,  $f = \overline{OF}$ . Relation de conjugaison au centre ( $v$  est la vergence) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = v$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}$$

Formule de Newton aux foyers :

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = f f' = -f'^2$$

#### 4.1.3 Miroirs sphériques

Pour un miroir sphérique, on note  $S$  le sommet,  $C$  le centre et  $F$  le foyer objet, confondu avec le foyer image. Relation de conjugaison au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Relation de conjugaison au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

Relation de Newton :

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = f^2$$

Grandissement :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{CA'}{CA} = -\frac{SA}{SA'} = \frac{FA'}{FS} = \frac{FS}{FA}$$

## 4.2 Interférences de deux sources monochromatiques

### 4.2.1 Onde lumineuse

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} - \phi_S)}$$

### 4.2.2 Théorème de malus

Dans un milieu isotrope, les rayons issus d'un même point sources restent normaux aux surfaces d'onde.

### 4.2.3 Intensité lumineuse

$$I = E_m^2 = 2\langle E^2 \rangle_t = \underline{E} \underline{E}^*$$

### 4.2.4 Formule de superposition

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \Delta\varphi(M)) (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \rangle_t$$

### 4.2.5 Conditions d'interférence

Avant tout, il faut que  $\omega_1 = \omega_2$ , sinon les intensités lumineuses s'ajoutent. Les ondes se superposent suffisamment loin des sources pour qu'on puisse considérer que les champs sont colinéaires ( $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1$ ). La différence de phase entre les deux ondes se décompose en

$$\Delta\varphi(M) = \Delta\varphi_M + \Delta\varphi_S$$

où  $\Delta\varphi_M$  est la différence de phase géométrique due aux différences de marche des deux rayons et  $\Delta\varphi_S$  est le déphasage entre les sources. Celui-ci doit être constant pour pouvoir observer des interférences. En pratique, les rayons incidents doivent provenir d'une même source principale, et la longueur de cohérence doit être grande devant la différence de chemin optique. Dans ces conditions, on dit que les ondes sont cohérentes.

### 4.2.6 Modèle scalaire de superposition

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi(M))$$

$$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

L'intensité lumineuse est maximale lorsque la différence de marche  $\delta(M)$  est un multiple entier de la longueur d'onde, elle est minimale pour des demi multiples entiers de  $\lambda_0$ .

### 4.2.7 Visibilité

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

### 4.2.8 Ordre d'interférence

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$$

### 4.2.9 Déphasage à la traversée de systèmes optiques

Une lentille ou un miroir introduit un déphasage de  $\pi$ , tandis qu'un diaphragme diffractant introduit un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ .

### 4.2.10 Observation des franges

On considère que les ondes qui interfèrent sont issues de deux sources ponctuelles cohérentes. Les surfaces équiphasse vérifient  $S_2M - S_1M = \text{cte}$ , ce sont des hyperboloïdes de foyers  $S_1$  et  $S_2$ . Si l'écran d'observation est perpendiculaire à l'axe des sources, on observe des anneaux d'interférences, si il est placé parallèlement à l'axe des sources on observe des branches d'hyperboles assimilables localement à des franges rectilignes. Dans les deux cas les interférences ne sont pas localisées (elles existent dans tout l'espace où les rayons se superposent).

### 4.2.11 Franges rectilignes

On calcule la différence de marche  $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$  :

$$\delta(M) = n(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot \vec{S}_1 \vec{S}_2 = \frac{nax}{D}$$

Interfrange :

$$i = \frac{\lambda D}{na}$$

### 4.2.12 Franges circulaires

L'écran est perpendiculaire à l'axe des sources.

$$r_2 = D + \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2D+a} \quad r_1 = D - \frac{a}{2} + \frac{\rho^2}{2D-a}$$

Ce qui donne une différence de marche :

$$\delta(M) = na \left( 1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right)$$

Si l'anneau central est brillant, c'est à dire  $\frac{na}{\lambda} = p_0 \in \mathbb{Z}$ , le rayon du  $m$ -ième anneau brillant est

$$\rho_m = \sqrt{p_0 - m} D \sqrt{\frac{2\lambda}{a}}$$

## 4.3 Interférences pour une source étendue

On considère le dispositif des fentes d'Yong de longueur  $s$  (les trous sont élargis dans la direction perpendiculaire à l'axe des sources). Une translation de  $\varepsilon$  de la source principale entraîne une différence de marche supplémentaire de  $\frac{na\varepsilon}{d}$

$$I(M) = \frac{2I_0}{s} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \left[ 1 + \cos \left[ \frac{2\pi a}{\lambda} \left( \frac{x}{D} + \frac{\varepsilon}{d} \right) \right] \right] d\varepsilon$$

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a s}{\lambda d} \right) \cos \left( \frac{2\pi a x}{\lambda D} \right) \right]$$

Le sinus cardinal est appelé degré de cohérence spatiale de la source. Sa valeur absolue vaut aussi la visibilité. Pour que les franges restent visibles, il faut que la variation de la différence de marche entre les extrémités de la source reste petite devant la longueur d'onde.

## 4.4 Michelson et interférences non localisées

L'interféromètre est éclairé par une source ponctuelle.

### 4.4.1 Coin d'air

L'interféromètre de Michelson en coin d'air a ses sources secondaires séparées d'une distance fonction de  $\alpha$  et de la distance entre la source principale équivalente  $L$  :

$$a = 2\alpha L$$

### 4.4.2 lame d'air

Les sources secondaires sont dans un axe perpendiculaire aux sources, qui sont séparées de

$$a = 2e$$

### 4.4.3 Doublet spectral

La source ponctuelle émet à deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  voisines. On pose :

$$\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1} \quad \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

Avec la formule de sommation des cosinus, on trouve :

$$I(M) = 4I_0 \left[ 1 + \gamma(M) \cos \left( \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_m} \right) \right]$$

$$\gamma(M) = \cos(\pi\Delta\sigma\delta(M))$$

### 4.4.4 Profil spectral

On considère une raie spectrale de longueur  $\Delta\sigma$  comprise entre  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

$$I(M) = \frac{2I_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} 1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M)) d\sigma$$

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \operatorname{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta(M)) \cos \left( \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_m} \right) \right]$$

## 4.5 Michelson et interférences localisées

### 4.5.1 Coin d'air

Les franges d'interférence sont rectilignes et localisées sur les miroirs : plus on ouvre le diaphragme, plus il faut rapprocher l'écran pour conserver le contraste. L'angle d'incidence des rayons doit rester petit.

### 4.5.2 Lamé d'air

Les anneaux sont localisés à l'infini : plus on ouvre le diaphragme, plus il faut éloigner l'écran pour conserver le contraste. Pour un rayon issu de la source étendue, la différence de marche s'écrit

$$\delta(M) = 2e \cos i$$

Le chariotage du miroir mobile permet de mesurer des variations de l'ordre d'interférence  $p(M) = \frac{2e \cos i}{\lambda}$ , et donc de longueur d'onde.

## 4.6 Diffraction de Fraunhofer

### 4.6.1 Principe de Huygens-Fresnel

Chaque point  $P$  d'une surface atteinte par la lumière de la source primaire se comporte comme une source ponctuelle secondaire qui émet une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'onde primaire et à l'élément de surface  $dS$  autour de  $P$ . Les sources secondaires sont cohérentes entre elles.

### 4.6.2 Formule de diffraction à l'infini

On note  $t(X, Y)$  est la transmittance de l'ouverture  $S$ . L'amplitude au point  $M(x, y)$  situé à la distance  $r$  de la source

$$E(M) = K \iint_S t(X, Y) e^{-j\omega\left(\frac{x}{r}X + \frac{y}{r}Y\right)} dXdY$$

Remarque importante : il y a invariance par translation dans le l'ouverture dans son plan.

### 4.6.3 Interférences entre les sources secondaires

L'intensité lumineuse observée sur l'écran est proportionnelle au produit de la fonction d'interférence entre les différentes sources secondaires principales par la transformée de Fourier d'une ouverture.

### 4.6.4 Réseau à N fentes

$$E_m = E_{m0} \sum_{p=1}^N e^{-j(p-1) \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin \theta - \sin \theta_i)}$$

$$I(\Delta\phi) = E_{m0}^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \right]^2$$

Résultat à multiplier par la fonction de diffraction en  $\text{sinc}^2(u)$  si on tient compte de l'épaisseur des fentes.